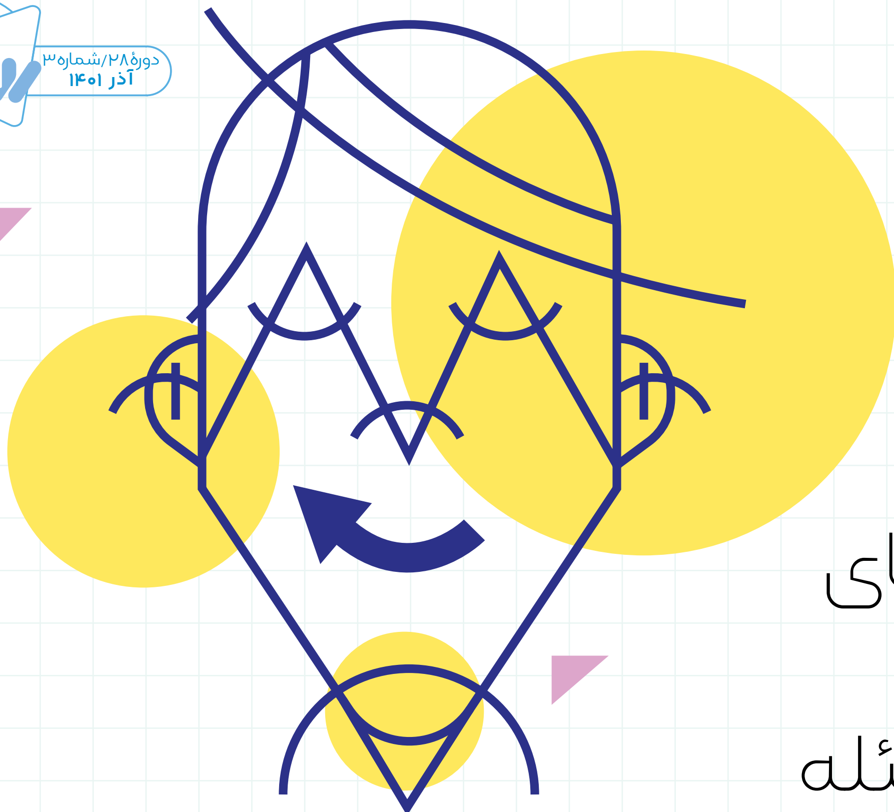


محمود نصیری

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله
هم‌نهشت‌ها یا منطبق‌ها

تبدیل‌ها و هم‌نهشتی در هندسه

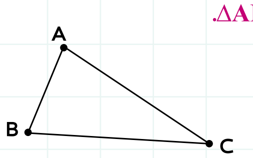
در شماره‌های قبلی با تعریف چندضلعی و ویژگی‌هایی از آن، مانند تعداد قطرها و مجموع اندازه‌های زاویه‌ها آشنا شدیم. در این قسمت با یکی از مهم‌ترین و اساسی‌ترین مفهوم‌های هندسی آشنا می‌شویم که «هم‌نهشتی» یا «قابل انطباق بودن» شکل‌های هندسی است. پس در هندسه، هم‌نهشتی به طور شهودی به معنی بر هم نشستن یا بر هم منطبق‌شدن دو شکل است و شکل مجموعه‌ای از نقطه‌هاست. وقتی با هم‌نهشتی مثلث‌ها آشنا شوید، به دنیایی از حل مسئله‌ها دست می‌یابید. در واقع هم‌نهشتی حرکت روبه‌جلوی هندسه را انجام می‌دهد. وقتی می‌گوییم دو شکل قابل‌انطباق یا هم‌نهشت هستند، شاید برداشت چنین باشد که همواره بتوان یکی از شکل‌ها را طوری حرکت داد که روی دیگری چنان قرار گیرد که همهٔ جزءهای نظیربه‌نظیر روی هم واقع شوند و در واقع دو شکل کاملاً بر هم منطبق شوند؛ بدون آنکه اندازه و ریخت آن‌ها تغییر کند. این همان روشی است که **اقلیدس** برای هم‌نهشتی دو مثلث، هرگاه دو ضلع و زاویهٔ شامل آن دو ضلع با قسمت‌های نظیرش از دیگری هم‌نهشت باشند، به کار برد. اما اقلیدس درک خود را از حرکت بیان نکرده است.

امروزه با توجه به سطحی که هندسه نوشته می‌شود، روش‌های متفاوتی برای هم‌نهشتی بیان می‌شوند. معمولاً در هندسه‌های مقدماتی و دبیرستانی روشی به نام «تبدیل‌های هندسی» توصیه می‌شود. این روش در کتاب‌های درسی بیشتر کشورها مشاهده می‌شود. زیرا تعریفی کلی است و فقط به مثلث‌ها و چندضلعی‌ها محدود نمی‌شود و شامل همهٔ شکل‌های هندسی می‌شود؛ مثلاً هم‌نهشتی هر دو چندضلعی دلخواه، یا هم‌نهشتی دو دایره و غیره.

قبلاً هم‌نهشتی دو پاره‌خط و همچنین دو زاویه را به وسیلهٔ اندازه‌های آن‌ها تعریف کردیم. اما خواهیم دید که با مفهوم تبدیل‌های هندسی، درک این هم‌نهشتی ساده‌تر خواهد بود. مهم‌ترین بخش هم‌نهشتی‌ها مربوط به هم‌نهشتی دو مثلث است.

تعریفی که در مورد چندضلعی‌ها بیان کردیم، شامل مثلث هم می‌شود، اما چون مثلث یکی از مهم‌ترین شکل‌های هندسه است، آن را به‌طور مستقل هم تعریف می‌کنیم.

تعریف: هر گاه سه نقطهٔ متمایز A و B و C روی یک خط نباشند، مجموعهٔ نقطه‌های سه‌پاره‌خط $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ و $\overline{CA}$ را یک مثلث می‌نامیم (شکل ۱) و به این صورت نشان می‌دهیم: $\triangle ABC$.



شکل ۱

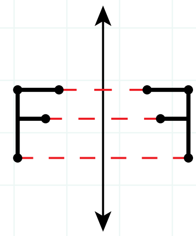
پس هر مثلث شامل سه پاره‌خط است که روی یک خط نیستند و هر پاره‌خط با پاره‌خط دیگری در نقطه‌های انتهایی خود مشترک است. هر یک از این پاره‌خط‌ها ضلع مثلث هستند و مطابق شکل، زاویه‌های A، B و C سه زاویهٔ مثلث محسوب می‌شوند. هر ضلع شامل دو رأس مثلث و ضلع مقابل به رأس با زاویهٔ سوم مثلث است. مثلاً ضلع $\overline{BC}$ مقابل رأس A یا مقابل $\angle A$ از مثلث است. همچنین، هر زاویهٔ مثلث که شامل دو ضلع آن باشد، به‌طور غیررسمی زاویهٔ بین آن دو ضلع یا به‌طور دقیق‌تر زاویهٔ شامل دو ضلع نامیده می‌شود.

بعد از مقدمه‌های بالا به بحث اصلی که هم‌نهشتی است برمی‌گردیم. در اساس مفهوم هم‌نهشتی به یکی از مفهوم‌های اساسی‌تر هندسه گره خورده است که آن را «تبدیل‌های هندسی» می‌نامیم.

تبدیل در هندسه یعنی چه؟

این پرسش در هندسه به قدری اهمیت دارد که وقتی به سطح‌های بالاتر هندسه می‌رسیم، ریاضی‌دان‌ها به کمک آن خود هندسه را توجیه می‌کنند.

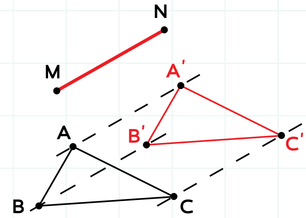
اجازه بدهید با مثال‌های شهودی شروع کنیم. خط m را در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم (شکل ۲). حرف F را در صفحهٔ P با یک قلم جوهری رسم می‌کنیم. سپس کاغذ را روی خط m تا می‌کنیم و دوباره باز می‌کنیم. اثر کاغذ در سمت راست خط m تصویر قرینهٔ F را نشان می‌دهد. این را «عمل بازتاب» می‌نامند که همان ویژگی آینه است.



شکل ۲

به‌طور شهودی یک عمل برگرداندن انجام شده است، زیرا صفحهٔ کاغذ را گرد خط m برگرداندیم. در واقع متناظر هر نقطهٔ شکل F، در سمت چپ خط m، نقطه‌ای در سمت راست خط m داریم. مانند آن است که از هر نقطه روی F بر خط m عمودی رسم کنیم و آن را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم.

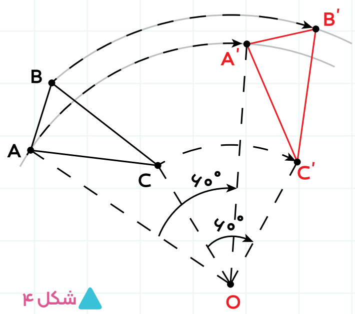
این عمل را می‌توانیم با قانون دیگری نیز انجام دهیم. پاره‌خط $\overline{MN}$ به‌طول ۳ سانتی‌متر در صفحهٔ P مفروض است. $\triangle ABC$ را نیز در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم. از سه رأس $\triangle ABC$ خط‌هایی را موازی خط $\overline{MN}$ رسم می‌کنیم. سه نقطهٔ B'، A' و C' را روی این سه خط چنان پیدا می‌کنیم که: $AA'=BB'=CC'=3$ و A'، B' و C' چنان باشند که مطابق شکل همهٔ سمت‌های راست سه نقطهٔ A، B و C قرار گیرند (شکل ۳). این شرایط مانند آن است که سه نقطهٔ A، B و C به اندازهٔ ۳ واحد روی خط‌های موازی لغزانده شده‌اند تا به نقطه‌های A'، B' و C' تبدیل شده‌اند.



شکل ۳

مشاهده می‌کنید که $\triangle ABC$ را به موازات خط MN و به اندازهٔ ۳ سانتی‌متر در جهت از M به N لغزانده‌ایم تا بر $\triangle A'B'C'$ منطبق شود. هر نقطهٔ $\triangle A'B'C'$ نظیر یک نقطه و فقط یک نقطه از $\triangle ABC$ است. این عمل لغزاندن را در ریاضی «انتقال» می‌نامند.

می‌توانیم مشابه دو عمل قبل، عمل چرخاندن را روی نقطه‌ها انجام دهیم که به زبان ریاضی آن را «دوران» می‌نامیم. نقطهٔ O و $\triangle ABC$ در صفحه مفروض‌اند (شکل ۴). از O به A وصل می‌کنیم و به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم. سپس از O خطی چنان رسم می‌کنیم که با خط OA زاویه‌ای 60° بسازد. فرض کنیم این خط این دایره را در A' ببرد. اکنون A' دوران یافتهٔ A گرد مرکز دوران O و به اندازهٔ زاویهٔ 60° در جهت ساعت‌گرد است.



شکل ۴

همین عمل را برای نقطه‌های B و C انجام می‌دهیم تا نقطه‌های B' و C' به دست آیند. در این صورت $\triangle A'B'C'$ دوران یافتهٔ $\triangle ABC$ گرد نقطهٔ O و به اندازهٔ زاویهٔ 60° است که این جهت دوران یا چرخاندن در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است و آن را «ساعت‌گرد» می‌نامیم. در این حالت نیز نقطه‌های $\triangle ABC$ طبق قانونی که آن را چرخاندن یا دوران نامیدیم، به نقطه‌های $\triangle A'B'C'$ نظیر شده‌اند.

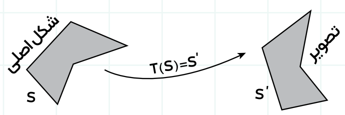
اگر سه مثال بالا را دوباره مرور کنیم، مشاهده می‌کنیم که هرکدام با عملی یا قانونی که تعریف کرده‌ایم، نقطه‌هایی از صفحه را به نقطه‌هایی از همان صفحه نظیر کرده‌اند؛ اولی با برگرداندن یا به زبان ریاضی بازتاب و قرینه پیدا کردن، دومی با لغزاندن نقطه‌ها که همان «انتقال» نامیدیم و سومی با چرخاندن نقطه‌ها که «دوران» نام‌گذاری کردیم. هر کدام از این عمل‌ها، یک «تبدیل» نامیده می‌شوند. پس چنین به نظر می‌رسد که یک تبدیل روندی در صفحه است که نقطه‌هایی از صفحه را به نقطه‌های دیگر آن صفحه، طبق قانون خودش نظیر می‌کند. در واقع، هر یک از این عمل‌ها یک حرکت در هندسه هستند که به‌طور دقیق‌تر آن را «حرکت صلب» نیز می‌نامند؛ یعنی حرکتی که در اثر آن اندازهٔ بین نقطه‌های شکل و ریخت شکل تغییر نمی‌کنند.

بنابراین، با حرکت همهٔ نقطه‌های یک شکل هندسی طبق قانون‌های معین، شکل دیگری پدید می‌آید که آن را تصویر شکل اصلی می‌نامند. این روند «تبدیل» نامیده می‌شود.

تعریف: تبدیل T در صفحهٔ P عملی یا قانونی است که هر نقطهٔ A از صفحهٔ P را دقیقاً به یک نقطهٔ A' از صفحهٔ P نظیر می‌کند که آن را تصویر A می‌نامیم. برعکس، هر نقطهٔ A' از صفحهٔ P، تصویر فقط یک نقطهٔ A از صفحهٔ P است.

وقتی تبدیل T نقطهٔ A را به نقطهٔ A' نظیر می‌کند، آن را به صورت $T(A)=A'$ می‌نویسیم و خوانده می‌شود: تبدیل‌یافتهٔ نقطهٔ A تحت تبدیل T نقطهٔ A' است. یا A' تصویر A تحت تبدیل T است. به‌طور کلی اگر شکل S' تبدیل‌یافتهٔ شکل S تحت تبدیل T باشد (شکل ۵)، می‌نویسیم:

$T(S)=S'$



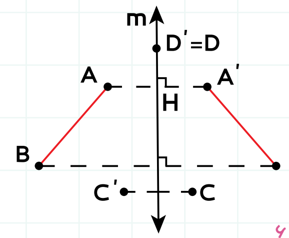
شکل ۵

بنابراین، چهار تبدیل مهم را در صفحه بررسی می‌کنیم که عبارت‌اند از ۱. بازتاب ۲. انتقال ۳. دوران ۴. لغزه.

چون هر سه تبدیل انتقال، دوران و لغزش را می‌توان به کمک بازتاب نیز تعریف کرد، بنابراین ابتدا تبدیل بازتاب را دقیق‌تر بررسی می‌کنیم.

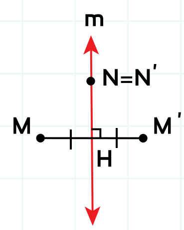
طرح یک مسئله

نقطهٔ A و خط m را در یک صفحه در نظر می‌گیریم. از A خطی را بر خط m عمود رسم می‌کنیم تا خط m را در نقطهٔ H ببرد (شکل ۶). بنابراین H پای عمود است.



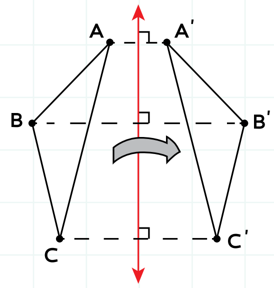
شکل ۶

روی خط AH و در طرفی که شامل A نیست، نقطه A' را چنان در نظر می‌گیریم که: AH=HA'. بنابراین طبق یک قانون به ازای نقطهٔ A در صفحهٔ شامل A و خط m، نقطه‌ای مانند A' را نظیر کرده‌ایم. این قانون چیست؟ آن را برای نقطه‌های B و C نیز انجام دهید.
اگر نقطهٔ D روی خط m باشد، این قانون چگونه نقطهٔ D' را به آن نظیر می‌کند؟
اگر A'، B' یا C' را داشته باشیم باز هم براساس این قانون می‌توانید A، B یا C را مشخص کنید؟
در واقع این قانون که آن را می‌توانیم یک عمل نیز بنامیم، این‌گونه است که هر نقطهٔ M از صفحهٔ خط m را به نقطه‌ای مانند M' از آن صفحه چنان نظیر می‌کند که $\overline{MM'}$ عمود بر M و همچنین وسط $\overline{MM'}$ روی m واقع است (شکل ۷).



شکل ۷

قبلاً با مفهوم عمودمنصف آشنا شده‌ایم. بنابراین می‌توان گفت، خط m عمودمنصف پاره‌خط $\overline{MM'}$ است. اگر N روی خط m واقع شده، N' نیز همان N است. چرا؟
می‌توانیم این عمل را برای هر شکلی در صفحهٔ خط m نیز انجام دهیم. در شکل ۸ آن را در مورد ΔABC مشاهده می‌کنید. این عمل که به هر نقطهٔ صفحه نقطهٔ دیگری از آن صفحه را طبق قانونی نظیر می‌کند، یک تبدیل نام دارد. در مسئلهٔ حاضر این تبدیل بازتاب نیز نامیده می‌شود.



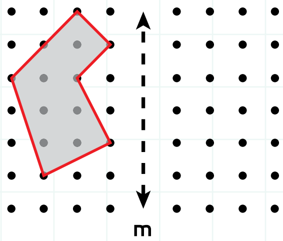
شکل ۸

بنابراین تعریف زیر را داریم:

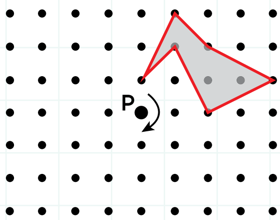
بازتاب: خط m در صفحهٔ P مفروض است. بازتاب نسبت به خط m قانونی است که هر نقطهٔ صفحهٔ P را به نقطه‌ای از آن مانند A' نظیر می‌کند، به‌طوری که خط m عمودمنصف پاره‌خط AA' باشد، و اگر A روی خود m باشد، A' همان A است.

در این صورت خط m را محور بازتاب می‌نامند و نقطهٔ A' را قرینه یا بازتاب A نسبت به خط m می‌نامند. بنابر این تعریف، بازتاب یک تبدیل است.
بازتاب را به‌طور شهودی برگرداندن نیز می‌نامند. در شکل ۸ می‌توانید چنان تصور کنید که ΔABC گرد خط m برگردانده شده تا بر ΔA'B'C' منطبق شود. یا به عبارت دیگر، اگر صفحهٔ کاغذ را از روی خط m تا کنیم، ΔABC روی ΔA'B'C' قرار می‌گیرید؛ به‌طوری که A روی A'، B روی B' و C روی C' واقع می‌شوند.

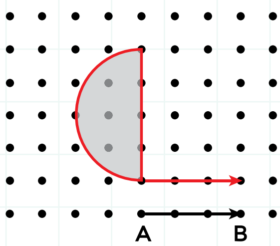
فعالیت: در شکل‌های ۹ تا ۱۱، خط بازتاب m و نقطهٔ P به‌عنوان مرکز دوران و زاویه به اندازهٔ °۱۸۰ به‌عنوان مقدار دوران و پاره‌خطی به اندازهٔ ۳ واحد به‌عنوان مقدار انتقال و جهت انتقال از چپ به راست داده شده است. تصویرهای هر یک از شکل‌ها را پیدا کنید.



شکل ۹
بازتاب نسبت به خط m



شکل ۱۰
دوران به مرکز P در جهت ساعت‌گرد و با زاویه به اندازهٔ °۱۸۰



شکل ۱۱
انتقال از چپ به راست به اندازهٔ ۳ سانتی‌متر به موازات خط AB

اگر دوران شکل داده‌شده گرد نقطهٔ P را به اندازهٔ °۳۶۰ انجام دهید، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
چگونه ممکن است در انتقالی، انتقال‌یافتهٔ یک شکل روی خود شکل واقع شود؟
در بازتاب اگر نقطه‌هایی روی خود محور بازتاب باشند، تصویر آن‌ها چگونه است؟
اگر شکلی محور بازتاب را در یک یا چند نقطه قطع کند، آیا می‌توانید نتیجه بگیرید تصویر یا بازتاب شکل نیز از همان نقطه یا نقطه‌ها می‌گذرد.
بازتاب یکی از مهم‌ترین تبدیل‌های هندسی است، زیرا تبدیل‌های انتقال و دوران و لغزه را می‌توانیم بر حسب آن تعریف کنیم. بنابراین اگر ویژگی‌هایی از تبدیل‌ها را به‌عنوان اصل بپذیریم، می‌توانیم هم‌نهشتی مثلث‌ها را به کمک آن ثابت کنیم.
هندسه‌ای را که به این صورت ساخته می‌شود، «هندسهٔ تبدیل‌ها» می‌نامند.